Verjetnost v fiziki, domača naloga: met igle na karo papir

Primož Cigler, 28090039

Ljubljana, oktober 2011

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

1 Naloga

33. Iglo dolžine l vržemo na karo-papir s črtami v kvadratni mreži z razmikom a. Zapiši verjetnost, da igla pade na (vsaj) eno izmed črt mreže.

2 Rešitev

2.1 Izbira koordinat

Slika 1: Skica izbire koordinat. x je razdalja med levim koncem igle do prve pokončne črte na desni, y je razdalja do najbližje zgornje horizontalne črte, če je $\varphi \geq 0$ ali spodnje, če je $\varphi < 0$ in kot φ.

Imamo 3 koordinate: x, y, φ, omejene z:

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 \leq y \leq a$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Če je V celoten fazni prostor, kamor lahko pade igla in P fazni prostor, da igla seka vsaj eno izmed črt, potem je verjetnost, da igla pade vsaj na eno črto enaka:

$$W = \frac{P}{V}$$

Zaradi simetrije lahko računamo s koordinato $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, torej je $V = a^2\frac{\pi}{2}$. Določiti je potrebno še P:

2.2 Primer: $0 \leq l \leq a$

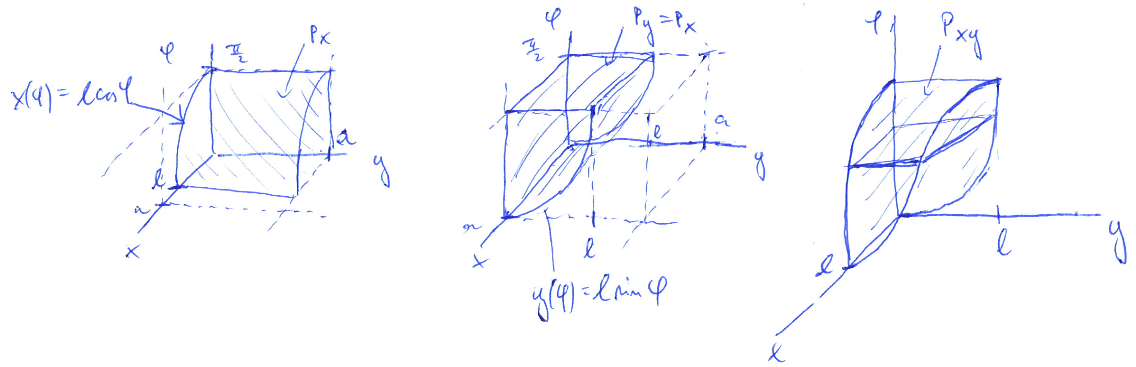
$$x(\varphi) = l \cos \varphi$$

$$y(\varphi) = l \sin \varphi$$

Vemo da je fazni prostor seštevek posameznih faznih prostorov minus presek faznih prostorov:

$$P = P_x + P_y - P_{xy} = 2P_x - P_{xy}$$

pri čemer smo s P_{xy} označili presek faznih prostorov in upoštevali da je $P_y = P_x$.



Slika 2: Skica faznih prostorov P_x, P_y in P_{xy}.

Izračun integrala:

$$P_x = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos\varphi \, d\varphi = al \Big[\sin\varphi \Big]_0^{\frac{\varphi}{2}} = al$$

$$P_{xy} = \int_0^{\frac{\varphi}{2}} l\cos\varphi \, l\sin\varphi \, d\varphi = l^2 \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{l^2}{2} \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{l^2}{4} \Big[-\cos\varphi \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l^2}{2}$$

$$P = 2P_x - P_{xy} = 2al - \frac{l^2}{2}$$

Verjetnost, da igla pade na vsaj eno izmed črt na papirju je:

$$W = \frac{2al - \frac{l^2}{2}}{\frac{\pi}{2} a^2} = \frac{4al - l^2}{\pi a^2}$$

2.3 Primer: $a < l \leq a\sqrt{2}$

Poiščemo raje φ kot funkcijo x in y:

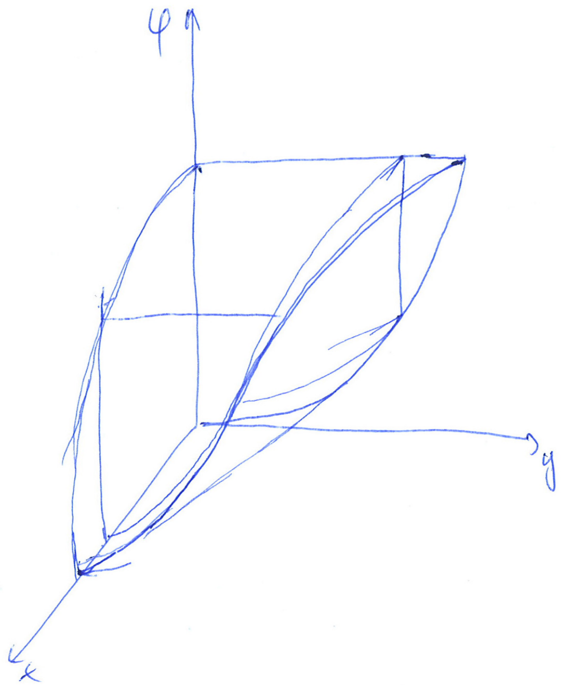
$$\varphi(x) = \arccos \frac{x}{l}$$

$$\varphi(y) = \arcsin \frac{y}{l}$$

$P_x = P_y$ je tedaj:

$$P_x = a \int_0^a \arccos \frac{x}{l} \, dx = \left[ax \arccos \frac{x}{l} - al\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \,\right]_0^a = a^2 \arccos \frac{a}{l} - al\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} + al$$

P_{xy} je preveč komplicirano telo, da bi znal izračunati elementarni dvojni integral.



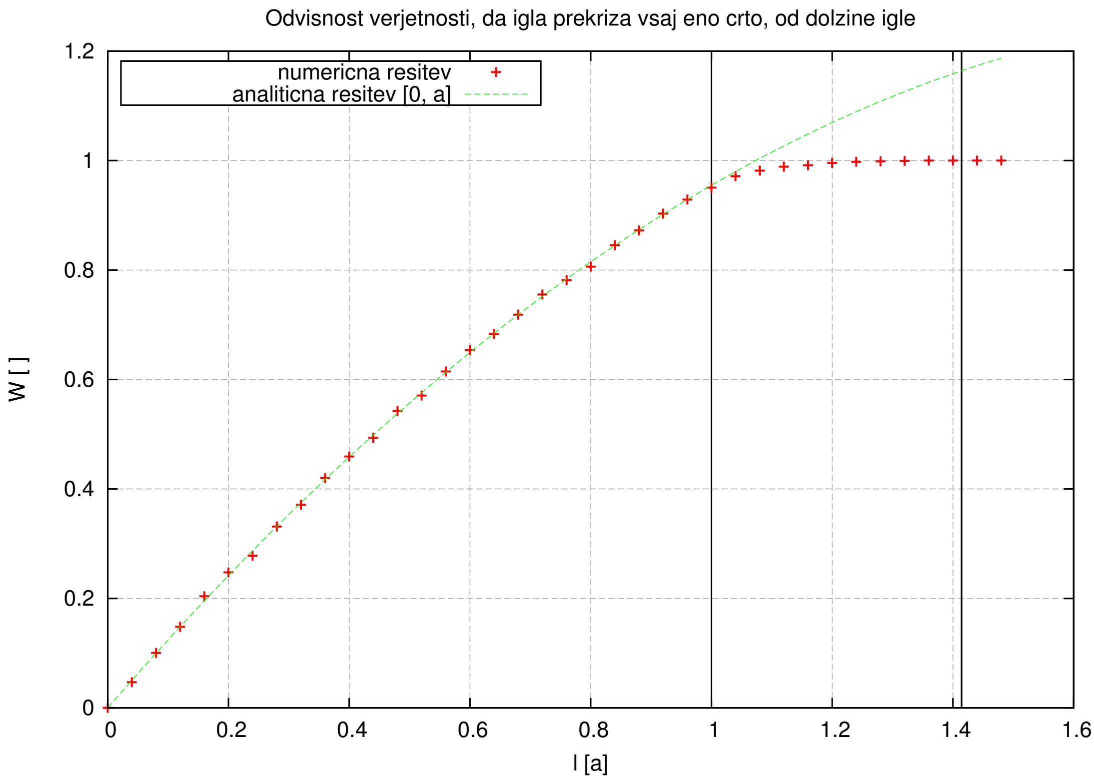
Slika 3: Skica preseka faznih prostorov P_{xy} za izračun dvojnega integrala.

2.4 Primer: $l > a\sqrt{2}$

$$W = 1$$

3 Analitično-numerična rešitev

Na graf sem narisal točke iz numerične rešitve, pri čemer sem z algoritmom napisanim v PHP-ju numerično izračunal met 100.000 igel za vsako posamezno dolžino l med 0 in $a\sqrt{2}$. Naj omenim le, da zvezna (analitična) rešitev velja le za vrednosti $l \leq a$, za $a \leq l \leq a\sqrt{2}$ pa bi veljala tista iz 2.3.



Slika 4: Graf rešitve.